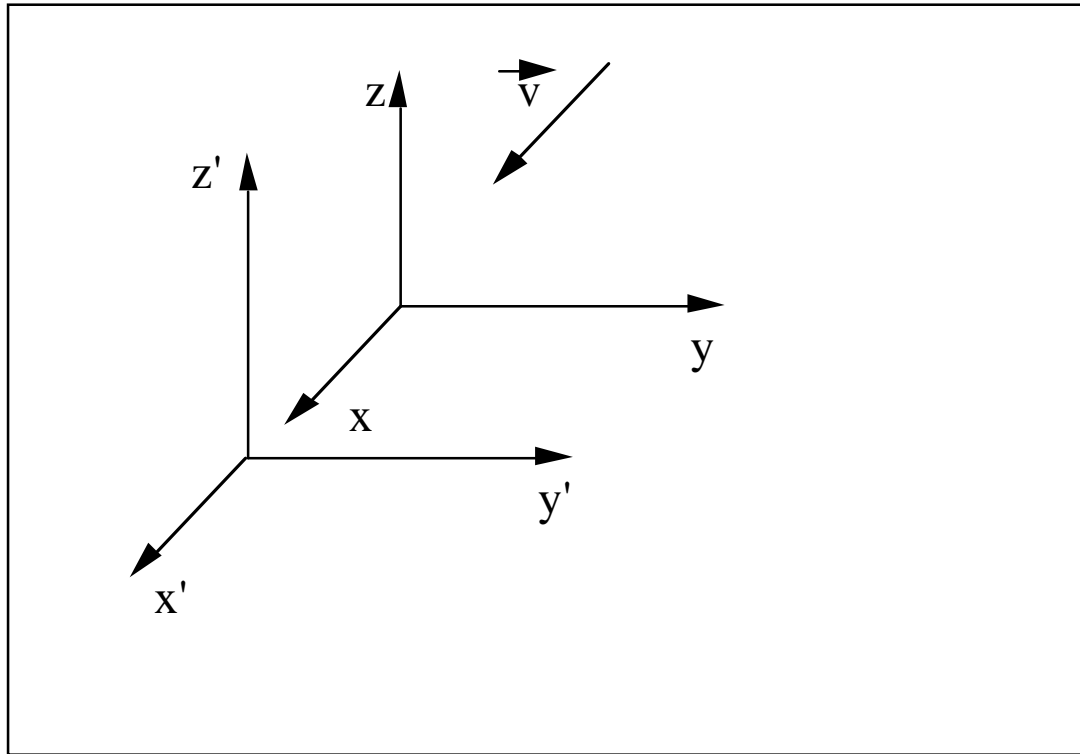


# La relativité restreinte

Un bref aperçu

# La relativité de Galilée



$$x = x' + vt$$

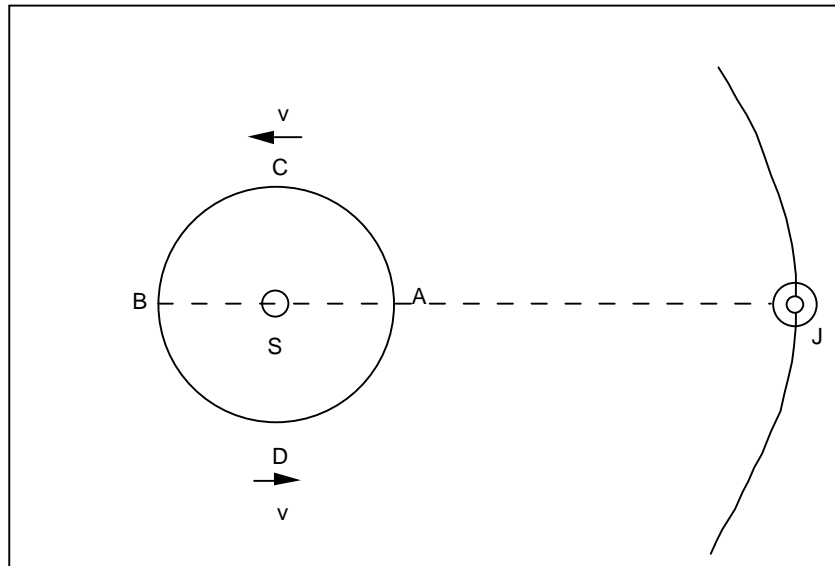
$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$\mathbf{v}(Ox) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{cases} \frac{dx'}{dt} + v \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{cases} = \mathbf{v}(O'x') + \mathbf{v}(\text{repère})$$

L'optique des corps en mouvement :

La lumière a une vitesse:



Olaf Römer 1676: les éclipses des satellites de Jupiter

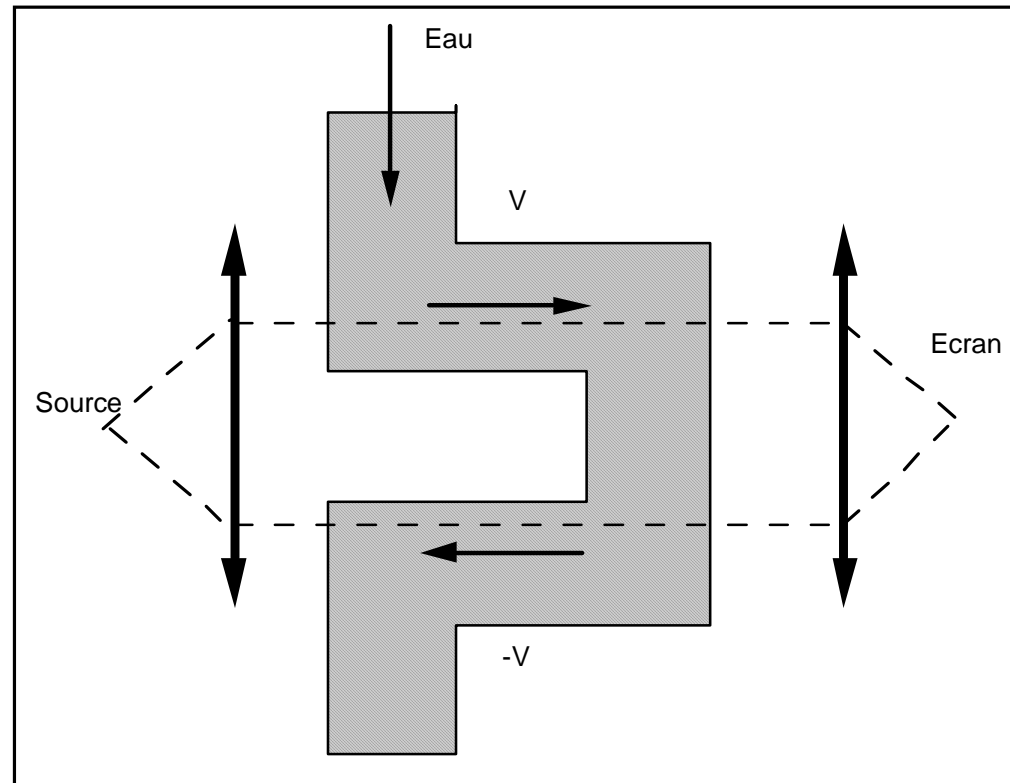
$$\tau_C = \frac{\tau_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

$$\tau_D = \frac{\tau_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

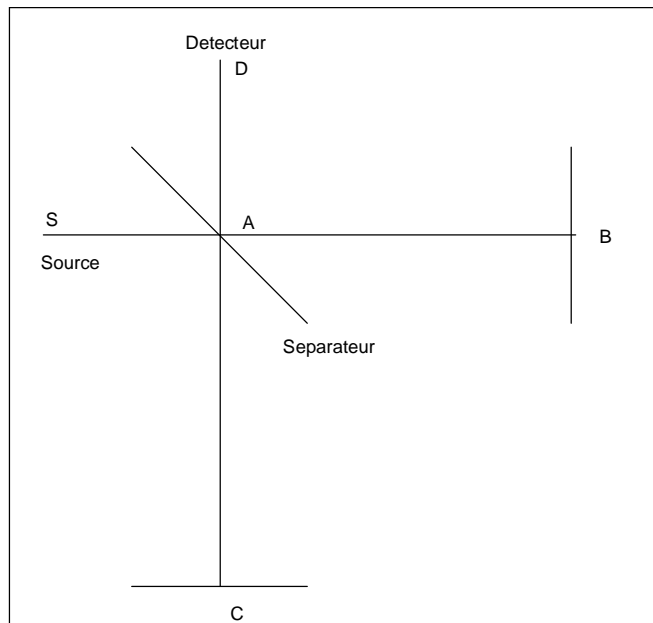
Mais elle ne se compose pas simplement:

Fizeau (1850) 
$$u = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$



Pire: On ne peut détecter le mouvement de la terre !

Michelson et Morley (1881)



$$\Delta\varphi = \frac{2\omega l}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{\omega l}{c} \frac{v^2}{c^2}$$

# Einstein 1905

Le principe de relativité revisité:

Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les repères en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Et donc:

La vitesse de la lumière est une constante universelle indépendante du repère, elle est isotrope.

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Mais, comme la vitesse de la lumière ne se compose pas

Il y a quelque chose de faux là dedans

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt_A} = \begin{cases} \frac{dx_B}{dt_B} + v \\ \frac{dy_B}{dt_B} \\ \frac{dz_B}{dt_B} \end{cases} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}$$

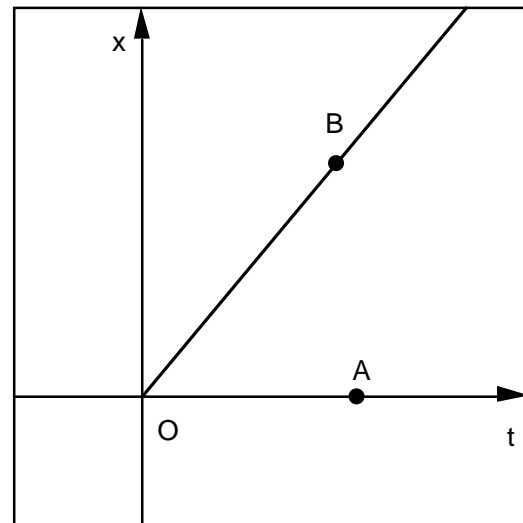
Et donc:

$$t_A \neq t_B$$

Le temps n'est plus universel!

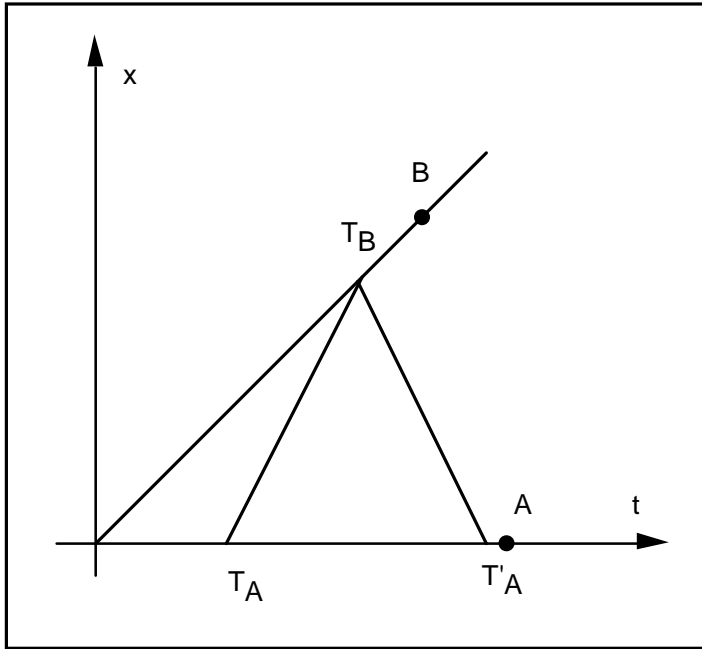
Comment pouvons nous trouver les nouvelles formules de changement de repère?

Méthode d'Hermann Bondi (1964): Le facteur  $k$



Un diagramme d'espace temps





Les deux observateurs communiquent en échangeant des signaux, le facteur  $k$  caractérise ce processus:

$$T_B = k(v)T_A$$

Mais:  $T'_A = kT_B = k^2T_A$

Et la vitesse de la lumière est constante

$$T'_A - T_A = \frac{2L}{c}$$

Avec:  $L = vT_A^1$

où  $T_A^1 = \frac{T'_A + T_A}{2}$

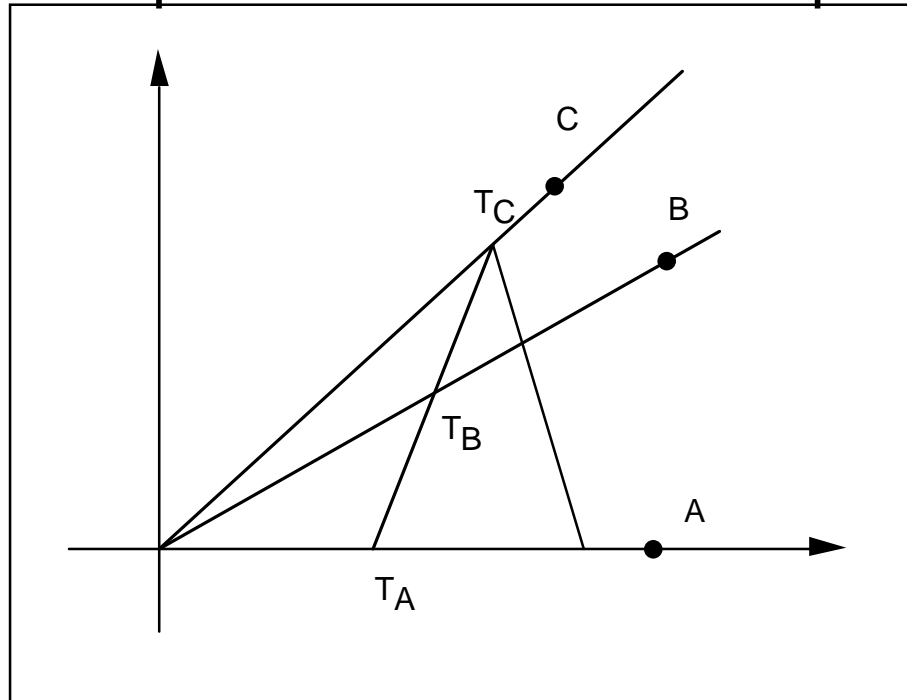
Ce qui donne:

$$k = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Applications directes:

a) La composition des vitesses:

Si un repère C a une vitesse  $u$  par rapport à B, alors:



$$k_{AC} = k_{AB}k_{BC}$$

Et donc si  $w$  est la vitesse de C par rapport à A:

$$\sqrt{\frac{1 + \frac{w}{c}}{1 - \frac{w}{c}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}$$

Soit:

$$w = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

b) Effet Döppler:

Un signal est envoyé par A à t puis à t+T

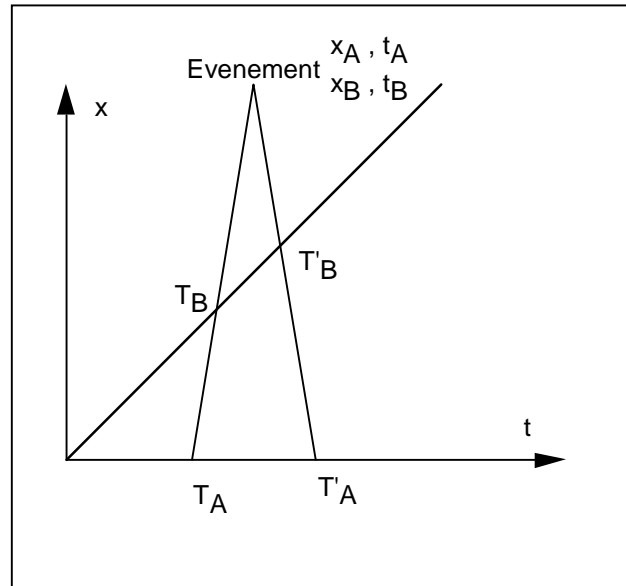
Il est reçu à kt et à k(t+T)

Et donc la période pour B est:

$$T_B = kT_A = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} T_A$$

C'est le « red schift »

c) Les transformations de Lorentz:  
 Coordonnées d'un événement dans deux repères:



$$x_A = \frac{c}{2}(T'_A - T_A)$$

$$t_A = \frac{T'_A + T_A}{2}$$

$$x_B = \frac{c}{2}(T'_B - T_B)$$

$$t_B = \frac{T'_B + T_B}{2}$$

Et en utilisant:  $T_B = kT_A$   
 $T'_A = kT'_B$

On trouve:

$$t_A + \frac{x_A}{c} = k(t_B + \frac{x_B}{c})$$

$$t_A - \frac{x_A}{c} = \frac{1}{k}(t_B - \frac{x_B}{c})$$

Soit:

$$t_A = \frac{t_B + \frac{vx_B}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_A = \frac{vt_B + x_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y_A = y_B$$

$$z_A = z_B$$

La structure de l'espace temps est construite par les quadrivecteurs !

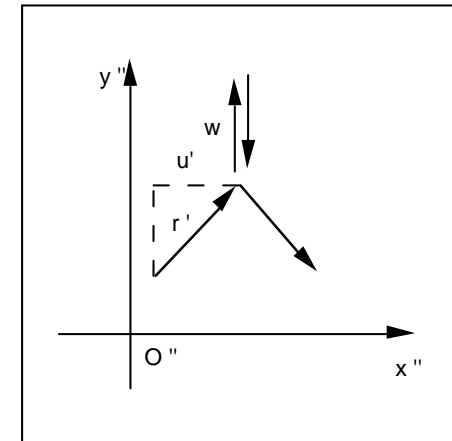
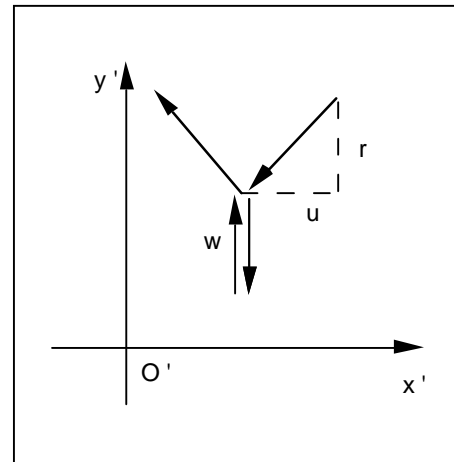
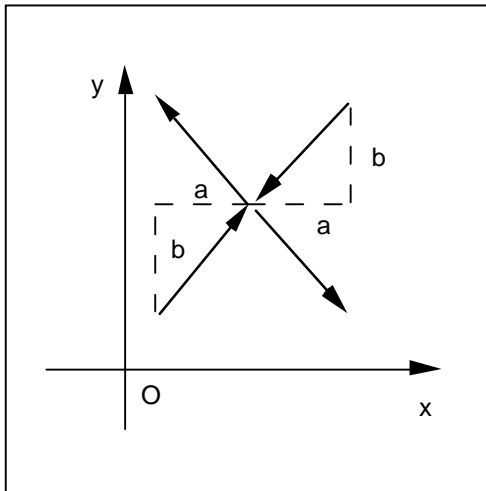
Un quadrivecteur a une norme conservée dans les transformations de Lorentz qui s'exprime comme:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Cette norme (produit scalaire d'un vecteur par lui même) définit la métrique de l'espace temps.

Un quadrivecteur est un objet qui se transforme par les transformations de Lorentz!

Si on étudie les chocs de deux particules en relativité dans différents repères,



La composition des vitesses impose que:

$$\mathbf{p} = f(v)m\mathbf{v}$$

Avec:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$



Il est alors logique de proposer la loi de Newton comme:

$$\bar{f} = \frac{d\bar{P}}{d\tau}$$

avec  $\bar{P} = m\bar{U}$  et  $\bar{U} = \frac{d\bar{x}}{d\tau}$

où  $d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$

$\tau$  est le temps propre (temps dans le repère lié à la particule).  $\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Du coup, la mécanique relativiste se déduit de la mécanique newtonienne en remplaçant les vecteurs par les quadrivecteurs.

Par exemple l'énergie devient

$$dE = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad \text{soit} \quad \frac{dE_A}{dt} = \mathbf{v}_A \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}_A}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \right)$$

Qui après un peu d'algèbre devient:

$$\frac{dE_A}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \right) \quad E_A(v_A) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

Qui donne la célèbre relation:  $E_A(v_A = 0) = mc^2$

La composante temporelle du quadrivecteur impulsion est alors proportionnelle à l'énergie:

$$P_{0A} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

$$P_{1A} = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

$$P_{2A} = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

$$P_{3A} = \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

$$P_{1A}^2 + P_{2A}^2 + P_{3A}^2 - \frac{E_A^2}{c^2} = -m^2 c^2$$

ou

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 = m^2 c^4$$

Les particules élémentaires:

On traque les particules élémentaire en étudiant des chocs:

Lois de conservation:

$$\sum_i \bar{P}_4(i) = \sum_f \bar{P}_4(f)$$

Et pour chaque particule:

$$E_n^2 = p_n^2 c^2 + m_n^2 c^4$$

Deux repères sont important:

a) Le repère du laboratoire.

b) Le repère du centre de masse.

$$\mathbf{v}_G = \frac{c^2}{E} \mathbf{p}$$

Les chocs intéressants sont les chocs inélastiques où l'on crée des particules nouvelles.

La conservation du quadrivecteur impulsion dans le repère du centre de masse:

$$\bar{P}_{1G} + \bar{P}_{2G} = \bar{P}_G$$

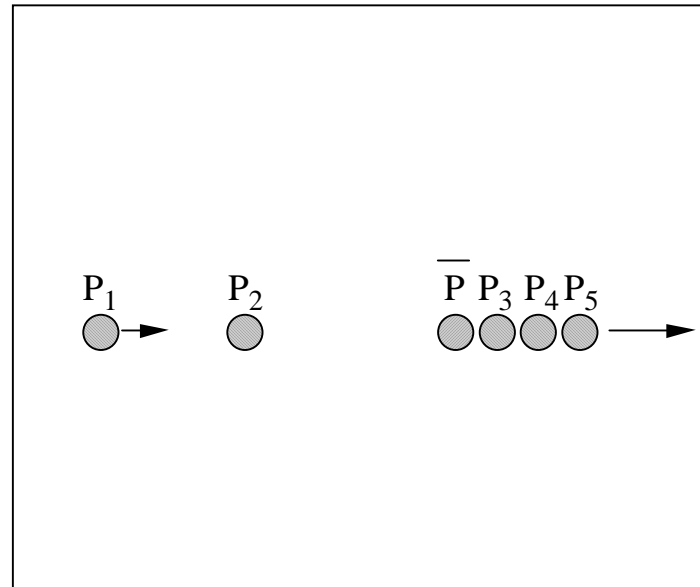
Nous donne 
$$\left(\bar{P}_{1G} + \bar{P}_{2G}\right)^2 = \left(\bar{P}_{1A} + \bar{P}_{2A}\right)^2 = \bar{P}_1^2 + \bar{P}_2^2 + 2\bar{P}_1\bar{P}_2 = -\frac{E_G^2}{c^2}$$

mais 
$$E'_G = \sum_{i \geq 3} \sqrt{m_i^2 c^4 + p_{iG}^2 c^2}$$
 Et donc 
$$E'_{G \min} = \sum_{i \geq 3} m_i c^2$$

Ce qui permet de calculer l'énergie seuil, énergie minimum de la particule 1 cognant sur la particule 2 au repos

$$E_{1 \min} = \frac{\left(\sum_{i \geq 3} m_i c^2\right)^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2m_2 c^2}$$

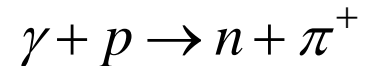
# Le découverte de l'antiproton



$$E_{1\min} = \frac{(4m_p c^2)^2 - m_p^2 c^4 - m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = 7m_p c^2$$

## Les rayons cosmiques de haute énergie

Kenneh Greisen, Georgy Zatsepin, Vadim Kuz'min en 1964 ont étudié la photoproduction du pion (méson  $\pi$ ).



Pour un proton au repos, l'énergie seuil pour le photon est de

$$E_{\gamma \min} = \frac{(m_n c^2 + m_\pi c^2)^2 - m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = 0,153 \text{ GeV}$$



Mais l'univers est baigné par le fond cosmologique, une population de photons à une température de 2,7 Kelvins soit  $2,34 \cdot 10^{-4}$  eV.

Si on fait un changement de repère (une transformation de Lorentz) pour amener le photon de 0,153 GeV à  $2,34 \cdot 10^{-4}$  eV,

Le facteur  $k$  vaut juste:  $\frac{E_A}{E_B}$  et donc, l'énergie du proton sera dans ce repère:

$$E_A = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2} m_p c^2 \left( k + \frac{1}{k} \right) \approx \frac{1}{2k} m_p c^2 \approx 2,8 \times 10^{20} \text{ eV}$$

QuickTime™ et un  
décompresseur TIFF (LZW)  
sont requis pour visionner cette image.

Premiers résultats du détecteur Auger.

## Les collisionneurs et le boson de Higgs (Mécanisme de Higgs, Englert, Brout)

Reprenons l'équation:

$$\left(\bar{P}_{1A} + \bar{P}_{2A}\right)^2 = \bar{P}_1^2 + \bar{P}_2^2 + 2\bar{P}_1\bar{P}_2 = \frac{E_G'^2}{c^2} \quad \left(\bar{P}_{1A} + \bar{P}_{2A}\right)^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \frac{E}{c}$$

Dans le cas du collisionneur elle devient:

$$(E_1 + E_2)^2 - (p_1 - p_2)^2 c^2 = E_G'^2$$

Si on a deux protons de même énergie (comme au LHC)  
On obtient:

$$E_G'^2 = 4E^2$$

Au lieu de:

$$E_G'^2 = 2Em_p c^2 + 2m_p^2 c^4$$

L'énergie des deux faisceau du LHC sera de l'ordre de 14 TeV (Teraelectronvolts pour  $10^{12}$  eV). L'un des buts du LHC est de trouver les bosons de Higgs, Une réaction typique de formation des bosons de Higgs est la suivante :

$$p + \bar{p} \rightarrow H^{++} + H^{--}$$

$$E_G'^2 > 4m_H^2 c^4$$

## Quelques conclusions:

a) Le calcul  $k$  peut permettre une introduction intuitive de la relativité restreinte.

b) L'utilisation de  $E = mc^2$  Et de  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

Permet une introduction relativement simple à l'étude des chocs inélastiques et à la création de particules inconnues.